Leçon 229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

1. Fonctions monotones. —

On se place ici sur I un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Définition et premières propriétés. —

- Définition d'une fonction monotone $f : I \to \mathbb{R}$, strictement monotone.
- Ex : $f(x) = ax + b$, $f(x) = 2^x$ sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- La combi lin à coeffs positifs de fonctions croiss est croiss. Si f croiss, -f décroiss. Si f croiss positive, 1/f décroiss. Si f,g croiss, $f \circ g$ aussi. Si f,g décroiss, $f \circ g$ croiss.
- Le produit de fonctions monotones n'est pas forcément monotone (ex : $f(x) = x{*}x$). Pareil pour l'inverse si f non-nulle. Croiss + décroiss = n'importe quoi.
- La fonction de répartition d'une v.a. réelle est croissante.

2. Régularité et caractérisation des fonctions monotones. —

- Pour $x_n \to x$ et f monotone, la suite $f(x_n)$ est convergente.
- Les fonctions monotones sont réglées.
- L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.
- ex : Pour $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q} \cap]0,1[$ bijective, $u_n(x) := \left| \begin{array}{r} \frac{1}{2^n} \text{ si } \varphi(n) < x \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$, et $f = \sum_{n \geq 0} u_n$, f est strict croiss sur $]0,1[$ et discontinue en tout point rationnel.
- Une fonction monotone est continue ssi son image est un intervalle.
- Une fonction strictement monotone est injective.
- Si $f : I \to \mathbb{R}$ est strictement monotone et continue, alors c'est un homéomorphisme sur son image.
- Si f de classe C^1, f monotone ssi $f' \geq 0$ ou $f' \leq 0$, avec stricte monotonie ssi l'ensemble des zéros de z' est d'intérieur vide.
- Les fonctions monotones sont dérivables presque partout (admis)

3. Suites de fonctions monotones. —

- Une limite simple de fonctions croiss est croiss.
- Ex : $f(x) = \sum_{n \geq 0} n.x^{2^n}$ est croiss sur $[0, 1[$.
- Théorèmes de Dini : Soit $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ suite de fonctions continues convergeant simplement vers une fonction f continue. Si la suite des f_n est croissante, alors la convergence est uniforme.
- Ou bien, si les f_n sont des fonctions croissantes et f est continue, alors la convergence est uniforme.
- Contre-ex : $f_n(x) = 1 - x^n$ sur $[0, 1]$. Les f_n sont une suite croissante de fonctions croissantes qui cv simplement, mais leur limite n'est pas continue et la cv ne peut donc pas être uniforme.

4. Fonctions à variations bornées. —

- Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est à variations bornées ssi il existe M tel que pour toute subdivision σ de $[a, b]$, $\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \geq M$.
- Def : $V_a^b(f)$
- Les fonctions monotones sont à variations bornées.
- Les fonction de $C^1([a, b], \mathbb{R})$ sont à variations bornées, et on a $V_a^b(f) = \int_a^b |f'(x)|dx$ via Taylor-intégral à l'ordre 1 + le th des accroissements finis.
- Les fonctions à variation bornées sont la somme d'une fonct croiss et d'une fonct décroiss. Ainsi, $BV([a, b])$ est le $\mathbb{R}$-ev engendré par les fonctions monotones. (Poser $g(x) = V_a^x(f)$ et $h(x) = g(x) - f(x)$).
- Contre-ex : $f(x) = \left| \begin{array}{l} x.sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{array} \right.$ est continue sur $[0, 1]$ mais pas à variations bornées.

2. Fonctions convexes. —

Dans le cas général, on regarde $f : U \to \mathbb{R}$ où U est un ouvert convexe d'un $\mathbb{R}$-ev E : $\forall x, y \in U\ \forall \lambda \in [0, 1]\ \lambda.x + (1 - \lambda).y \in U$.

1. Définitions et premières propriétés. —

- Def de convexité, stricte convexité, forte convexité, concavité.
- Ex : une norme sur E, $< Ax, x >$ sur R^n pour $A \in S_n^{++}$, exp sur $\mathbb{R}$.
- La somme de fonct convexes est convexe, la limite simple aussi. Si f est convexe, -f est concave.
- Le produit de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = x^2.x$ non-convexe).
- (cas réel)La composée de fonct convexes n'est pas forcément convexe ($f(x) = (e^x)^2 - 1000e^x$ non-convexe)(sa dérivée seconde en 0 est strict négative)
- (cas réel) Si f continue, bijective sur son image, et convexe, alors f^{-1} est concave. Ex : exp et log.
- Def de la log-convexité. Une fonction log-convexe est convexe.
- Ex : exp et Γ. (admis) Γ est l'unique fonction log-convexe qui vaut 1 en 0 et tq $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

2. Caractérisation des fonctions convexes. —

- Une fonct cont est convexe ssi $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Contre-ex : Indicatrice de $\mathbb{Q}$.
- Propriété des 3 cordes. $x \in I - \{x_0\} \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est croissante.
- Si f est différntiable sur U, alors pour $x, y \in U$, $D(f)$ est croissante sur $[x, y]$. Dans le cas réel, f' est croissante sur I.
- Les fonct convexes ne sont pas toutes différentiables, ex $|x|$.
- Si f est D^2 en x, alors sa hessienne est positive. Ex : $< Ax, x >$, $f(x) = x^4$.
- $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$ est fortement convexe ssi A définie positive, et on connaît la constante de forte convexité. Donc $< Ax, x >$ est coercive.

3. Propriétés de régularité. —

- f est convexe et concave ssi elle est affine

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe est majorée/minorée ssi elle est constante.
- Appli aux solutions non-nulles de $y" - q(x).y = 0$, elles sont convexes non-bornées.
- Une fonction convexe est continue dans toutes les directions.
- Une fonction convexe sur une boule de R^n est continue.
- (cas réel) Une fonction convexe est dérivable à gauche et à droite en tout point.
- (cas réel) l'ensemble des points tq $f'_d \neq f'g$ est au plus dénombrable.
- Si f est convexe et dérivable alors f' est C^1.
- En dim n on a l'existence de dérivées partielles en tout point et une différentiabilité pp (admis)

3. Applications de la monotonie et de la convexité. —

1. Etude de suites et de séries. —

- Trucs sur la monotonie de suties récurrentes ??. Exemple du sinus, comparaison série-intégrale, application à la série harmonique.
- **Dev** : Processus de Galton-Watson.

2. Inégalités de monotonie. —

- cf : Rombaldi

3. Inégalités de convexité. —

- Inégalité arithmético-géométrique (via exp et ln)
- Inégalité de Young : $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec égalité ssi $a^p = b^q$. (le cas p=q=2 se démontre polynômialement. le cas général se démontre avec l'inégalité arithmético-géométrique)
- Inégalité de Jensen : Pour $g : [0, 1] \to]a, b[$ continue et $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ convexe, $f(\int_0^1 g(x)dx \leq \int_0^1 f(g(x))dx$. Donc pour X v.a. réelle intégrable, $f(E[X]) \leq E[f(X)]$.
- Inégalité de Hölder : $\|fg\|_r \leq \|f\|_p.\|g\|_q$, où $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. (Vrai aussi pour $p = \infty$ et $q = 1$).
- Inégalité de Minkowski : $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ Les L^p sont des evn et L^2 est préhilbertien.
- Si $f \in L^p \cap L^q$ alors $f \in L^r$ pour tout $p \leq r \leq q$.
- Lemme de Fatou : $\liminf(\int f_n) \leq \int \liminf(f_n)$. Les L^p sont complets pour $\|.\|_p$.

4. Optimisation. —

- Si f est convexe, tout min local est global. Si f admet des extrema et est strictement convexe, le minimum est unique. Si f est fortement convexe et continue, elle est coercive donc elle admet un unique minimum.
- Méthode du gradient à pas optimal/conjugué
- **Dev** : Optimisation dans un Hilbert : Soit H un espace de Hilbert et $f : H \to \mathbb{R}$ une fonction continue, coercive, et convexe. Alors f atteint son minimum dans H. De plus, pour une suite $(a_n)_n$ telle que $f(a_n) \to inf(f)$, $(a_n)_n$ possède des valeurs d'adhérence pour la convergence faible, et une telle valeur d'adhérence α vérifie $f(\alpha) = inf(f)$.
- Rem : L'existence de valeur d'adhérence faibles de suites minimisantes, et leur propriété de minimisation, permet l'étude de solutions faibles d'équations différentielles dans des espaces de Hilberts comme les espaces de Sobolev.

Références

Ramis-Deschamps-Odoux : Partie fonctions monotones.
Gourdon : Th de Dini, Partie sur les variations bornées, suites récurrentes monotones.
Briane-Pagès : Inégalités de Hölder, Minkowski.
Rombaldi : Fonctions convexes, régularité, Inégalités de monotonie.
Hiriart-Urruty : $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > - < b, x >$, Gradient à pas conjugué.
Gonnord,Tosel : Différentiabilité pp d'une fonction convexe en dim n.
Ciarlet : Optimisation dans un Hilbert.(Dev)
Ouvrard : Processus de Galton-Watson.(Dev)
Hauchecorne : Contre-exemples.

July 7, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes